

Proeftoets 3 Calculus 1 voor MST, 4501CALC1Y
voor de toets van donderdag 9 oktober 2014; 13:45-15:45 uur

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

Naam: _____ Leids studienummer: _____
Groep (omcirkel): A (M. Keijzer) / B (P.M. Visser) / C (J.T. van Essen)

Een rekenmachine en het formuleblad bij deze cursus mogen gebruikt worden.
Laat duidelijk zien hoe u aan de antwoorden gekomen bent.
Het cijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 2, gedeeld door 2,2.

- 2p 1. (a) Voor een ellips in het xy -vlak geldt de vergelijking $x^2 + 3y^2 = 7$.
Bereken m.b.v. impliciet differentiëren een vergelijking voor de raaklijn aan de
ellips in het punt $(2, 1)$.

- 2p (b) Integraal $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ is oneigenlijk ('improper'). Waarom?

Bereken, indien mogelijk, de integraal.

2p 2. (a) Bereken exact: $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 - \sin(t)}} dt$

2p (b) Bereken $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$

2p (c) Bereken $\int [\ln(3x)]^2 dx$

3. Bepaal van de volgende reeksen of ze convergent, dan wel divergent zijn.
Als een reeks een convergente meetkundige reeks is, bereken dan ook de som.

1p (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan(n)$.

2p (b) $3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \dots + (-1)^n \frac{2^n}{3^{n-1}} + \dots$

2p (c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$

2p 4. (a) k is een positieve constante. Laat, door partieel te integreren, zien dat:

$$\int x^2 e^{-kx} dx = -\left(\frac{x^2}{k} + \frac{2x}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) e^{-kx} + C.$$

2p (b) Gebruik opgave 4a en bepaal of de volgende reeks convergent dan wel divergent

is (voor constante $k > 0$): $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 e^{-kn})$

1p (c) Bekijk in het waterstofatoom de afstand x tussen de kern en het elektron (in de grondtoestand). De kans dat de elektron-kern-afstand x kleiner is dan R , is:

$$P(x \leq R) = \frac{4}{a_0^3} \int_0^R x^2 e^{-\frac{2}{a_0}x} dx,$$

waarin $a_0 = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{m}$, de Bohr-straal. Laat met een berekening zien, dat de totale kans dat het elektron zich ergens in de ruimte bevindt, gelijk is aan 1.