

# Proeftoets 3

October 14, 2015

**Om niet zoveel papier te verspillen heb ik geen ruimte gelaten voor de uitwerking. Bij de toets vanmiddag moet je de uitwerking wel onder de opgaven maken.**

1. Bereken de volgende limieten; ingeval de limiet niet bestaat geef dat dan aan met een toelichting.

a.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{(x - \pi)^2}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+2} \right)$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x})$$

2. a. Geef een primitieve van  $x^3(\sqrt{1+x^4})$ , m.a.w. bereken:

$$\int x^3(\sqrt{1+x^4}) dx$$

b. Bereken:

$$\int \sqrt{x} \cos(x\sqrt{x}) dx.$$

c. Bereken

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$$

3. a. Bereken de bepaalde integraal

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

- b. De onderstaande integraal is een oneigenlijke integraal. Geef aan waarom de integraal oneigenlijk is. Ingeval de integraal convergeert geef dan zijn waarde; als de integraal divergeert leg dan uit waarom dat zo is.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

4. a. Geef van de volgende reeks aan of hij convergeert dan wel divergeert. Bereken zijn waarde indien convergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- b. Bereken de breuk voorgesteld door:

$$0.201520152015\dots$$

- c. Geef van de volgende reeks aan of hij convergeert dan wel divergeert. Bereken zijn waarde indien convergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{7}{11} \right)^n - \left( \frac{3}{5} \right)^n \right]$$

### Hints en antwoorden.

Bij 1a. Pas l'Hospital toe ( $2\times$ ); antwoord:  $\frac{1}{2}$

Bij 1b. Breng eerst onder één noemer; antwoord:  $-2$

Bij 1c. Haal  $x$  voor de buitenste haakjes; antwoord limiet bestaat niet, of  $+\infty$

Bij 2a. Stel  $u = x^4$ ; antwoord:  $\frac{1}{6}(1 + x^4)^{3/2} + C$

Bij 2b. Stel  $u = x^{3/2}$ ; antwoord:  $\frac{2}{3} \sin(x\sqrt{x}) + C$

Bij 2c. Eerst partiëel en daarna breuksplitsing; antwoord :

$$-\frac{\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

Bij 3a. Spits kwadraat af, en substitueer:  $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})$ . antwoord  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Bij 3b. De integrand wordt  $+\infty$  bij 1 en convergeert niet.

Bij 4a. Integraal kenmerk, divergent

Bij 4b. Antwoord:  $\frac{2015}{9999}$

Bij 4c. Convergent, twee meetkundige reeksen met  $|r| < 1$ ; antwoord:  $\frac{1}{4}$ .