

# Proeftoets 4

October 28, 2015

**Om niet zoveel papier te verspillen heb ik geen ruimte gelaten voor de uitwerking. Bij de toets vanmiddag moet je de uitwerking wel onder de opgaven maken.**

- Bereken het derde orde Taylor-polynoom  $T_3(x)$  en de restterm  $R_3(x)$  rond  $a = 0$  van  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .
  - Schat met behulp van  $R_3(x)$  voor  $|x| < 0.2$  de grootte van de fout bij de benadering van  $f(x)$  door  $T_3(x)$ .
- Maak opgave 31 van paragraaf 8.1 (p. 586)
- Maak opgave 40 van paragraaf 8.3 (p. 606)
  - Los het beginwaarde probleem:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \beta e^{-\alpha t} P(t), \quad P(0) = P_0$$

op. Hierbij zijn  $\alpha, \beta$  constanten.

- Los op:

$$xy' = 2y + x^3 \cos(x).$$

- Los eveneens op:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - 1)y^3}{x^2(2y^3 - 3)}.$$

- Geef het richtingsveld voor de DV:

$$y' = x^2 - y - 2;$$

en teken in dit veld de oplossing met beginwaarde  $y(0) = 0$ . Neem voor  $x$  en  $y$  de punten  $-3, -2, \dots, 2, 3$ .

- Geef de algemene oplossing van:

$$y'' + 8y' + 25y = 10 \cos(t) + 26 \sin(t)$$

**Hints en antwoorden. Voorzichtig, in grote haast gemaakt, ik sta niet in voor de juistheid.**

1 a.

$$T_3(x) = x + x^3/6; \quad R_4(x) = \frac{x^4}{48}[e^z - e^{-z}].$$

1 b.  $|R_4(x)| \leq \frac{32}{48}10^{-4}$ .

2. Ongeveer 35 jaar.

3a. De DV wordt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(100,000 - x(t)).$$

1 april.

Iedereen krijgt de griep in dit model.

3b.

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right)$$

4 a. Schrijf als:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos(x)$$

De integrerende factor wordt dan  $\rho(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ .

4b. Schrijf als:

$$\frac{(2y^3 - 3)}{y^3} dy = \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$$

5a. Zie oplossing opgave 9 van paragraaf 8.1.

5b.

$$y_h(t) = e^{-4t}(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)).$$

$$y_p(t) = 0.05 \cos(t) + 1.1 \sin(t). \quad \text{Is dit juist?}$$

De algemene oplossing is  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ .