Deeltoets 1, Calculus 2, MST

Donderdag 5 december 2013, 13:30-15:30 uur, USC

- Vermeld **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer(s), studie(s).
- U mag gebruik maken van een (grafische) rekenmachine en een formulekaart.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is noodzakelijk. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 100 punten.

Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Succes!

1(20). We bekijken het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 7 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

(a) Zet het stelsel om in een aangevulde matrix, en veeg deze naar echelonvorm.

(b) Veeg de matrix naar gereduceerde echelonvorm, en geef alle oplossingen.

2(20) Gegeven is het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} x & +2y & +z & = & 3 \\ 2x & -y & +kz & = & 5 \\ x & +3y & -z & = & 2 \end{cases}$ waarin k een reëel getal is.

(a) Veeg de bijbehorende aangevulde matrix naar echelonvorm.

(b) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel strijdig is? Zo ja, geef deze waarden aan.

(c) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft? Zo ja, geef deze waarden aan.

(d) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel precies oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, geef deze waarden aan.

3(20) Voor de volgende matrices A, bepaal A^{-1} en los de vergelijking $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ op.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4(20) Bereken de eigenwaarden, en voor elke eigenwaarde een eigenvector, van de volgende matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5(20) Een dynamisch systeem wordt gegeven door $x_{i+1} = Ax_i$, met:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken x_1 en x_2.

(b) Laat zien dat $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ eigenwaarden van A zijn, en dat $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bijbehorende eigenvectoren zijn.

(c) Bepaal reële getallen c_1 en c_2 zodat $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

(d) Geef een formule voor x_i ($i \geq 1$).

(e) Bestaat de limiet voor $i \to \infty$ van $2^{-i} x_i$?

DEELTOETS 1 CALCULUS 2 MST 5/12/2013

1 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$

oplossingen: $x = 2$

$y - 2z = 3 \Rightarrow y = 3 + 2z$ z vrije variabele

parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Elke waarde van z geeft een oplossing. Er zijn dus oneindig veel oplossingen

2 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & k-2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & k-12 & -6 \end{array}\right)$

b) Het stelsel is strijdig voor $k = 12$ want dan geeft de laatste vergelijking $0 = -6$

c) Het stelsel heeft precies één oplossing voor alle $k \neq 12$. Want dan geeft de laatste vergelijking $z = -6/(k-12)$, en kunnen y en x successievelijk uit de 2e en 1e vergelijking worden opgelost.

d) Er zijn geen k ~~waar~~ waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

3 Algemeen: Voor een matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ geldt:

A inverteerbaar $\Leftrightarrow |A| := ad-bc \neq 0$ en dan is

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Verder heeft $A\underline{x}=\underline{b}$ precies één oplossing, namelijk $\underline{x}=A^{-1}\underline{b}$.

a) $$A^{-1} = \frac{1}{2\times 3-(1)(-1)}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

oplossing van $A\underline{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\underline{x}=\begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$

b) $$A^{-1} = \frac{1}{10\times 2-3\times 7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$$

oplossing van $A\underline{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\underline{x}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -16 \end{pmatrix}$

c) $$A^{-1} = \frac{1}{1\times 1-0\times 10^{-100}}\begin{pmatrix} 1 & -10^{-100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oplossing van $A\underline{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\underline{x}=\begin{pmatrix} 1 & -10^{-100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3\times 10^{-100} \\ 3 \end{pmatrix}$

4 a) Eigenwaardenvergelijking:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)+4 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

Dit geeft eigenwaarden: $\lambda=-1$, $\lambda=2$

Eigenvectoren:

$\lambda=-1$ $$\begin{pmatrix} 3-(-1) & 1 \\ -4 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \cancel{-4} & \cancel{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow 4x+y=0$

Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ is een eigenvector

(3)

$\lambda=2$ $\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -4 & -2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x+y=0$

Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector

b) Eigenwaardenvergelijking

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\lambda + 2$
$= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ discriminant $D = 2^2 - 4\cdot 2$
$= -4 < 0$

eigenwaarden: $\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$

Eigenvectoren

$1+i$ $\begin{pmatrix} 2-(1+i) & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -2 & 0 \\ 1 & -1-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-i & 0 \\ 1-i & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1+i)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-2 + (-1+i)(-1-i)$
$= -2 + (1-i)(1+i) = 0$

Dit geeft $x - (1+i)y = 0$
Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector

$1-i$ Neem complex geconjugeerden, dwz voer ~~bestaande~~ bovenstaande berekening uit met overal $-i$ in plaats van i

Dit geeft een eigenvector $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$

④

⑤ a) $x_1 = A x_0 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_2 = A x_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde 1

$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dus $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde 2

c) $c_1 v_1 + c_2 v_2 = x_0 \Leftrightarrow c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c_1 + 3c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{(-)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 1$

$-v_1 + v_2 = x_0$

d) $x_1 = Ax_0,\ x_2 = A x_1 = A^2 x_0, \ldots \rightarrow x_i = A^i x_0$.

Dus $x_i = A^i(-v_1 + v_2) = -A^i v_1 + A^i v_2$

$Av_1 = v_1,\ A^2 v_1 = Av_1 = v_1, \ldots \rightarrow A^i v_1 = v_1$

$Av_2 = 2v_2,\ A^2 v_2 = A(2v_2) = 2Av_2 = 2^2 v_2,\ \ A^3 v_2 = A(2^2 v_2) = 2^2 A v_2 = 2^3 v_2, \ldots$

$\rightarrow A^i v_2 = 2^i v_2$

Dit geeft: $x_i = -v_1 + 2^i v_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^i\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\lim\limits_{i\to\infty} 2^{-i} x_i = \lim\limits_{i\to\infty} -2^{-i}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lim\limits_{i\to\infty}\begin{pmatrix} -2^{-i}+3 \\ -2^{-i}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$