Deeltoets 2, Calculus 2, MST

Donderdag 23 januari, 13:30-15:30 uur, USC

Docenten: S.J. Edixhoven en J.H. Evertse

- Vermeld **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer(s), studie(s).
- U mag gebruik maken van een (grafische) rekenmachine en een formulekaart.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is noodzakelijk. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 100 punten.

Dit tentamen bestaat uit *zeven* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Succes!

1(10). Bereken van de volgende functies f de partiële afgeleiden f_x en f_y.

(a) $f(x, y) = e^{\sin(xy)}$.

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

2(15). Gegeven is de functie $f(x, y) = 2\sqrt{x + y - 1}$.

(a) Laat zien dat de gradiënt van f in $(1, 1)$ gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 1)$ in de richting $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) Bepaal de laagste en de hoogste waarden die de richtings-afgeleide van f in $(1, 1)$ heeft, en geef de bijbehorende richtingen.

(d) Geef de linearisering van f in $(1, 1)$.

(e) Benader $f(1.2, 0.8)$ met de linearisering.

3(15). Bepaal de globale extrema van de functie $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ op de cirkelschijf R met middelpunt $(0, 0)$ en straal 2.

4(15). Gegeven is de functie $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$. Bepaal alle kritieke punten van f en klassificeer ze.

5(15). Laat R het gebied in $\mathbb{R}^2$ zijn ingesloten door de krommen gegeven $x = y^2$ en $y = x-2$.

(a) Schets het gebied R.

(b) Bereken de integraal van de functie $f(x,y) = y$ over R.

6(15). Bereken (door overgang op poolcoördinaten) $\displaystyle\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}dy\,dx.$

7(15). Het volume van een bol met straal r is $4\pi r^3/3$. Het gemiddelde van een functie $f(x,y,z)$ over een gebied T is $\displaystyle\frac{1}{m}\iiint_T f(x,y,z)\,dV$, waarbij m het volume van T is. Bepaal de gemiddelde waarde van de functie $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, over de bolschil gegeven door $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$.

UITWERKING DEELTOETS 2, CALCULUS 2, MST
23/1/2014

1) a) $f(x,y)=e^{\sin xy}$

$$\boxed{f_x = e^{\sin xy}\cdot \cos(xy)\, y, \quad f_y = e^{\sin xy}\cdot \cos(xy)\, x}$$ (kettingregel)

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$

$$\boxed{f_x = \frac{1}{x^2+y}\cdot 2x, \quad f_y = \frac{1}{x^2+y}}$$ (kettingregel)

2) $f(x,y)=2\sqrt{x+y-1}$

a) $f_x = 2\cdot\frac{1}{2}(x+y-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$, $f_y = 2\cdot\frac{1}{2}(x+y-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$

gradiënt $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ $x=y=1$ invullen geeft $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{2^2+(-3)^2}$. Normalisering $\underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\underline{v} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

Richtingsafgeleide in $(1,1)$: $D_{\underline{u}} f(1,1) = \underline{u}\cdot\nabla f(1,1)$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot 1 + \frac{-3}{\sqrt{13}}\cdot 1 = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{13}}}$$

c) De richtingsafgeleide is maximaal in de richting van de gradiënt, dus in de richting $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De grootte hiervan is de lengte van de gradiënt

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

De richtingsafgeleide is minimaal in de tegenovergestelde richting van de gradiënt, dus in de richting $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

De grootte hiervan is $-$ lengte gradiënt is $\boxed{-\sqrt{2}}$

②

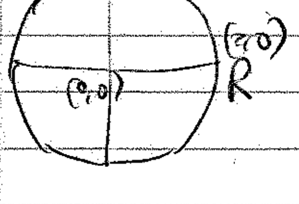
d) De linearisering van f rond (a,b) is
$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

In dit geval is dit: $(a=1, b=1, f(x,y) = 2\sqrt{x+y-1})$:
$z = 2 + (x-1) + (y-1) = x + y$.

Wanneer iemand in plaats hiervan de differentiaal $df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$ heeft gegeven heb ik dat ook goed gerekend.

e) $f(1.2, 0.8) \approx 1.2 + 0.8 = 2$.
(geeft in dit geval de precieze waarde van f.)

3) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ $\quad R$ = cirkelschijf met middelpunt $(0,0)$ en straal 2
$= \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$.



f neemt op R een globaal minimum en een globaal maximum aan.
Als zo'n globaal extreem in het inwendige van R (niet op de rand) wordt aangenomen dan is het een kritiek punt.
We bepalen eerst de kritieke punten van f.
$f_x = 2x - 2$, $f_y = 2y$
Kritieke punten: $2x - 2 = 0$ & $y = 0$ dus $(1,0)$
Er geldt: $f(1,0) = -1$.

De rand van R is gegeven door $x^2 + y^2 = 4$
Op de rand is $f(x,y)$ gelijk aan $4 - 2x$
Er geldt: $-2 \le x \le 2$
Op de rand is f minimaal als $x = 2$, d.w.z. in $(2,0)$
Er geldt: $f(2,0) = 0$
Op de rand is f maximaal als $x = -2$ d.w.z. in $(-2,0)$
Er geldt: $f(-2,0) = 8$.

Dus f neemt op R een globaal maximum 8 aan in $(2,0)$ en een globaal minimum -1 in $(1,0)$.

4) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$.
$f_x = 4y - 8x^3$, $f_y = 4x - 2y$.

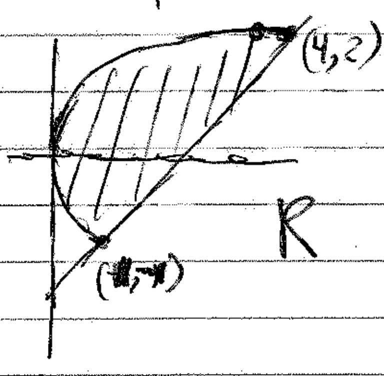
Kritieke punten: $f_x = 0$, $f_y = 0$ oplossen
$4y - 8x^3 = 0$, $4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x^3$, $y = 2x$.

De kritieke punten voldoen aan $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0, 1$, of -1
Dit geeft de kritieke punten: $(0,0)$, $(-1,-2)$, $(1,2)$

Classificatie: $f_{xx} = -24x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4$, $f_{yy} = -2$.

	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$H = AC - B^2$	
$(0,0)$	0	4	-2	-16	zadelpunt
$(-1,-2)$	-24	4	-2	32	loc. max
$(1,2)$	-24	4	-2	32	loc. max

5) a)



Snijpunten van $x = y^2$ en $y = x - 2$

$y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow y = -1$ of $y = 2$

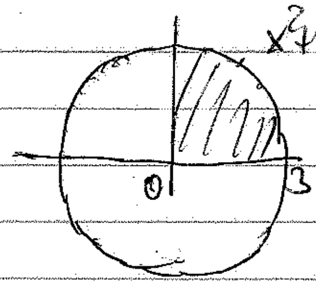
b) $R = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 2,\ y^2 \leq x \leq y+2\}$

$$\iint_R y\,dA = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x=y^2}^{y+2} y\,dx\right)dy = \int_{-1}^{2}[xy]_{x=y^2}^{y+2}\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\left((y+2)y - y^3\right)dy = \int_{-1}^{2}\left(y^2 + 2y - y^3\right)dy = \left[\tfrac{1}{3}y^3 + y^2 - \tfrac{1}{4}y^4\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} + 4 - \frac{16}{4} - \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{27}{12} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

6)



$0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$

$\Leftrightarrow y^2 \le 9-x^2, \; y \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \le 9, \; y \ge 0$

Dus R is een kwartcirkel met straal 3

Beschrijving van R in poolcoördinaten:

$R = \{(x,y) : 0 \le r \le 3, \; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$$\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \, dy \, dx = \int_{r=0}^{3} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{r^2}} \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{3} r^{1/2} dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = \left[\frac{2}{3} r^{3/2}\right]_{r=0}^{3} \cdot [\theta]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi\sqrt{3}}$$

7) $m = vol(T) = \frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3$

(inhoud van bol van straal b − inhoud van bol met straal a)

$\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Bolcoördinaten: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$

$$\iiint_T \rho(x,y,z) \, dV = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} = \rho^{-1} \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\rho=a}^{b} \rho \, d\rho \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_a^b \cdot [-\cos\varphi]_0^{\pi} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{b^2-a^2}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi(b^2-a^2)$$

gemiddelde $= \frac{2\pi(b^2-a^2)}{\frac{4}{3}\pi(b^3-a^3)} = \boxed{\frac{3}{2} \cdot \frac{b^2-a^2}{b^3-a^3}}$