Herkansing, Calculus 2, MST

Donderdag 30 januari, 13:30-16:30 uur, C3 Gorlaeus

Docenten: S.J. Edixhoven en J.H. Evertse

- Vermeld **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer(s), studie(s).
- U mag gebruik maken van een (grafische) rekenmachine en een formulekaart.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is noodzakelijk. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 100 punten.

Dit tentamen bestaat uit *acht* opgaven. Vergeet de achterkant niet.

Succes!

1(15) Gegeven is het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} x & +2y & +z & = & 0 \\ -x & +3y & +z & = & 5 \\ 12x & -y & +2z & = & t \end{cases}$ waarin t een reëel getal is.

(a) Veeg de bijbehorende aangevulde matrix naar echelonvorm.

(b) Zijn er waarden van t waarvoor het stelsel strijdig is? Zo ja, geef deze waarden aan.

(c) Zijn er waarden van t waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft? Zo ja, geef deze waarden aan.

(d) Zijn er waarden van t waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, geef deze waarden aan.

2(10) Voor de volgende matrices A, bepaal A^{-1} en los de vergelijking $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ op.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10^{-100} \end{pmatrix}$.

3(10) Bereken de eigenwaarden, en voor elke eigenwaarde een eigenvector, van de volgende matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $B = A^{1000}$, met A als in (a).

4(15) Een dynamisch systeem wordt gegeven door $x_{i+1} = Ax_i$, met:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken x_1 en x_2.

(b) Laat zien dat $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2/3$ eigenwaarden van A zijn, en dat $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bijbehorende eigenvectoren zijn.

(c) Bepaal reële getallen c_1 en c_2 zodat $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

(d) Geef een formule voor x_i ($i \geq 1$).

(e) Bestaat de limiet voor $i \to \infty$ van x_i?

5(15). Gegeven is de functie $f(x, y) = \ln(e^x - \sin(y))$.

(a) Laat zien dat de gradiënt van f in $(0, 0)$ gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(0, 0)$ in de richting $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Bepaal de laagste en de hoogste waarden die de richtings-afgeleide van f in $(0, 0)$ heeft, en geef de bijbehorende richtingen.

(d) Geef de linearisering van f in $(0, 0)$.

(e) Benader $f(0.2, -0.1)$ met de linearisering.

6(15). Gegeven zijn de functie $f(x, y) = 2 + xy$, en het gebied R begrensd door de x-as, de y-as en de lijn $y = 2 - 2x$.

(a) Heeft $f(x, y)$ kritieke punten in het inwendige van R?

(b) Bepaal de globale extrema van de functie $f(x, y)$ op R.

7(10). Laat R het gebied in $\mathbb{R}^2$ zijn ingesloten door de krommen $x = -y^2 + 2y + 1$ en $x = 1$.

(a) Schets het gebied R.

(b) Bereken de integraal van de functie $f(x, y) = y^2$ over R.

8(10). Bereken de integraal $\iiint_T f(x, y, z)\, dV$ van de functie $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ over de kwartcylinder T gegeven door $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $0 \leq z \leq 1$.