Deeltoets 2, Calculus 2 voor MST

Donderdag 22 januari 2015, 13:30–15:30

Docent: dr. P. J. Bruin

- Vermeld op elk antwoordblad **duidelijk leesbaar** uw naam (met voornaam en voorletters), studentnummer(s) en studie(s).
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: 1 + (aantal punten)/10.

Deze toets bestaat uit *zeven* opgaven.

Succes!

---

1 (10). Het tweedimensionale gebied R wordt gedefinieerd door de ongelijkheden

$$y \geq 0, \quad y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Schets het gebied R en bereken de oppervlakte-integraal $\displaystyle\iint_R xy\, dA$.

2 (10). Het driedimensionale gebied T wordt in bolcoördinaten (ρ, ϕ, θ) gedefinieerd door de ongelijkheden

$$2 \leq \rho \leq 3, \quad \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Schets het gebied T en bereken zijn inhoud.

3 (15). Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ -x & + & 6y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 8y & - & 7z & = & 5 \end{array}\right.$$

Zet dit stelsel om in een aangevulde matrix en bepaal de oplossing(en).

Ga verder op de achterkant.

4 (15) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \end{cases}$$

Bepaal alle oplossingen van dit stelsel in een parametervoorstelling.

5 (10). Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat A inverteerbaar is en bepaal de inverse van A.

(b) Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ op.

6 (10). Gegeven is de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van B, en bij elke eigenwaarde een eigenvector.

7 (20). Bekijk het dynamische systeem gedefinieerd door

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

waarbij de overgangsmatrix M en de begintoestand $\mathbf{x}_0$ gegeven zijn als

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken M^2, $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$.

(b) Laat zien dat $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0{,}7$ de eigenwaarden van M zijn, en dat $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bijbehorende eigenvectoren zijn.

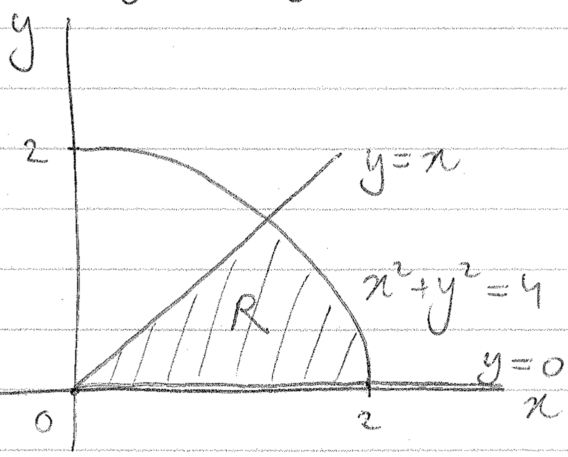
(c) Bepaal reële getallen c_1 en c_2 zodat $\mathbf{x}_0$ gelijk is aan $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$.

(d) Geef een formule voor $\mathbf{x}_n$ ($n \geq 1$).

Deeltoets 2, Calculus 2 voor MST
22 januari 2015, 13:30 – 15:30
Docent: Peter Bruin
Uitwerkingen

De puntenaantallen in de marge zijn een indicatie voor wat elke stap in de voorbeelduitwerking waard is.

1. Schets van R: $y \geq 0$, $y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 4$



1

Poolcoördinaten: $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $dA = r\,dr\,d\vartheta$ 1

R: $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ 2

$$\iint_R xy\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_0^2 (\cos\vartheta)(\sin\vartheta)\,r^3\,dr\,d\vartheta \qquad 1$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[(\cos\vartheta)(\sin\vartheta)\cdot\tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{2} d\vartheta \qquad 1$$

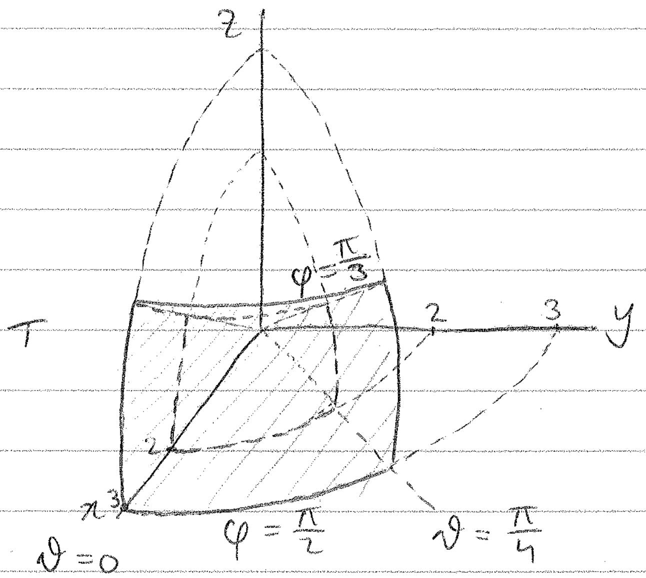
$$= \int_0^{\pi/4} 4\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta \qquad 1$$

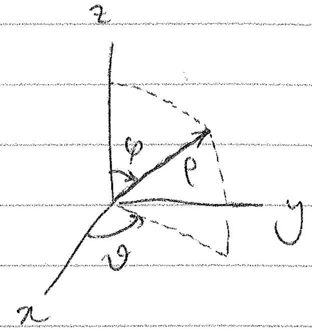
$$= \left[2(\sin\vartheta)^2\right]_{\vartheta=0}^{\pi/4} \qquad 2$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 0^2$$

$$= 1. \qquad 1$$

2. Schets van T: $2 \le \rho \le 3$, $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$





2

Bolcoördinaten: $dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta$ 1

Inhoud: $V = \iiint_T dV = \int_0^{\pi/4}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_2^3 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta$ 1

$$= \int_0^{\pi/4}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3}\rho^3 \sin\varphi\right]_{\rho=2}^{3} d\varphi \, d\vartheta$$ 1

$$= \int_0^{\pi/4}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \tfrac{1}{3}(3^3 - 2^3) \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$ 1

$$= \int_0^{\pi/4} \left[-\tfrac{19}{3}\cos\varphi\right]_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2} d\vartheta$$ 1

$$= \int_0^{\pi/4} \left(-\tfrac{19}{3}\cdot 0 + \tfrac{19}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\right) d\vartheta$$ 1

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{19}{6} \, d\vartheta$$ 1

$$= \tfrac{19}{6}\cdot\tfrac{\pi}{4}$$

$$= \tfrac{19}{24}\pi.$$ 1

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -x + 6y - z = 5 \\ 2x - 8y - 7z = 5 \end{cases}$

Aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & -8 & -7 & 5 \end{array}\right) \quad 1 \quad -2$$

3

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & -12 & -13 & -5 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -12 & -13 & -5 \end{array}\right) \quad 3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{10}$$

(rijtrapvorm) 5

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad -1 \quad -3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \frac{1}{4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ (gereduceerde rijtrapvorm) 5

Dit correspondeert met het stelsel

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3/2 \\ z = -1 \end{cases}$$

en dit is ook de (enige) oplossing. 2

[Alternatief: vanaf de rijtrapvorm verder via terug-substitutie.]

4.
$$\begin{cases} \phantom{x_1 - 2x_2 - {}} x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \phantom{{} + x_4} = 1 \\ x_1 - 2x_2 \phantom{{} - x_3} + x_4 = 3 \end{cases}$$

Aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ 3

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 1$$ (rijtrapvorm) 4

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ (gereduceerde rijtrapvorm) 2

De spilvariabelen zijn x_1 en x_3; de overige variabelen x_2 en x_4 zijn vrij. We geven een parametervoorstelling met parameters $x_2 = s$ en $x_4 = t$; deze is uit de gereduceerde rijtrapvorm af te lezen. 2

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = 2 - t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \text{oftewel} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 4

5.

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

De determinant van A is $|A| = \frac{3}{2} \cdot (-4) - (-1) \cdot 2 = -4$; 1
dit is $\neq 0$, dus A is inverteerbaar. 1
De inverse is (via de formule $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & -3/8 \end{pmatrix}.$$ 3

[Het is nuttig om te controleren dat $AA^{-1} = I$.]

Hiermee kunnen we $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ oplossen:

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 3

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & -3/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$ 2

[Het is nuttig om te controleren dat $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.]

[Alternatief: via de aangevulde matrix $\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$.]

6.
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bepalen van eigenwaarden en -vectoren:

1) karakteristieke vergelijking (KV) bepalen
2) eigenwaarden bepalen als oplossingen van KV
3) voor elke eigenwaarde λ een eigenvector $\vec{v}$ bepalen door $(B - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ op te lossen.

$$|B - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)(5-\lambda)$$

KV: $(2-\lambda)(5-\lambda) = 0$ 2

Eigenwaarden: oplossingen van KV

$\underline{\lambda_1 = 2}$ en $\underline{\lambda_2 = 5}$ 2

[Alternatief: ga na dat ~~de gegeven~~ twee goed gekozen vectoren eigenvectoren zijn, en gebruik dat er ten hoogste twee eigenwaarden zijn.]

Eigenvectoren bij $\lambda_1 = 2$: $(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$

Aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ oftewel

$x + 3y = 0$ $\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

Een oplossing is $\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$. 3

Eigenvectoren bij $\lambda_2 = 5$: $(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

Aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ oftewel

$y = 0$ $\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

Een oplossing is $\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$. 3

[Scalaire veelvouden van $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ $(\neq \vec{0})$ mogen ook.]

7. $$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) $$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}81 + 0{,}02 & 0{,}18 + 0{,}16 \\ 0{,}09 + 0{,}08 & 0{,}02 + 0{,}64 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}34 \\ 0{,}17 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$ 2

$$\vec{x}_1 = M\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$$ 1

$$\vec{x}_2 = M\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}54 + 0{,}48 \\ 0{,}06 + 1{,}92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}02 \\ 1{,}98 \end{pmatrix}$$ 2

[Alternatief: $\vec{x}_2 = M^2\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}34 \\ 0{,}17 & 0{,}66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.]

b) Ofwel eigenwaarden en -vectoren bepalen als in opgave 6, ofwel nagaan dat de gegeven vectoren eigenvectoren bij de gegeven eigenwaarden zijn en opmerken dat er hoogstens twee eigenwaarden zijn.

$$M\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 + 0{,}2 \\ 0{,}2 + 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{v}_1$$ 2

$$M\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}9 + 0{,}2 \\ -0{,}1 + 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7 \\ 0{,}7 \end{pmatrix} = 0{,}7\,\vec{v}_2$$ 2

dus $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn eigenvectoren bij de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0{,}7$, en meer eigenwaarden zijn er niet omdat de karakteristieke vergelijking een kwadratische vergelijking is. 1

7 c) Te bepalen: c_1, c_2 met $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}_0$

oftewel $c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

oftewel $\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$ 2

Aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) -2 \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) -\frac{1}{3}$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) -1 \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ 2

dus $c_1 = 1$ en $c_2 = 2$. 1

d) Als $\vec{v}$ een eigen~~waarde~~vector van A bij de eigenwaarde λ is, dan is $\vec{v}$ een eigenvector van A^n bij de eigenwaarde λ^n. Dit betekent dat $\vec{x}_n$ herschreven kan worden als

$$\begin{aligned} \vec{x}_n &= M^n \vec{x}_0 \\ &= M^n (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) \\ &= c_1 M^n \vec{v}_1 + c_2 M^n \vec{v}_2 \\ &= c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 \end{aligned}$$ 3

Invullen:

$$\begin{aligned} \vec{x}_n &= 1 \cdot 1^n \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot (0{,}7)^n \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\cdot(0{,}7)^n\\ 2\cdot(0{,}7)^n\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2-2\cdot(0{,}7)^n\\ 1+2\cdot(0{,}7)^n\end{pmatrix}. \end{aligned}$$ 2