Hertentamen Calculus 2 voor MST

Donderdag 29 januari 2015, 13:30–16:30

Docent: dr. P. J. Bruin

- Vermeld op elk antwoordblad **duidelijk leesbaar** uw naam (met voornaam en voorletters), studentnummer(s) en studie(s).
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: 1 + (aantal punten)/10.

Deze toets bestaat uit *tien* opgaven.

Succes!

---

1 (8) Gegeven is de functie

$$f(x, y) = y^2 \cos(\pi x) + x^2 \sin(\pi y).$$

(a) Bereken de gradiënt van f.

(b) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $P = (1, 2)$ in de richting van de eenheidsvector $\vec{u} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

2 (10) Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 5}\,\log(y - 1) + 1.$$

(a) Bepaal een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van f in het punt met (x, y)-coördinaten $(3, 2)$.

(b) Gebruik een lineaire benadering om de functiewaarde $f(3{,}1;\ 1{,}95)$ te benaderen.

3 (10) Bepaal de globale extrema van de functie

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y$$

op het domein

$$R\colon \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0.$$

Ga verder op de achterkant.

4 (8) Het driedimensionale gebied T wordt ingesloten door de vlakken

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 3y + 6z = 6.$$

(a) Schets het gebied T.

(b) Bereken de inhoud van T.

5 (8) Het gebied R in het vlak wordt in poolcoordinaten (r, θ) beschreven door de ongelijkheden

$$2 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}.$$

(a) Schets het gebied R.

(b) Bereken de oppervlakte-integralen $\iint\limits_R x\, dA$ en $\iint\limits_R y\, dA$.

6 (10) Een vat wordt in cylindercoördinaten (r, θ, z) beschreven door de ongelijkheden (afmetingen in meter)

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

In het vat zit een gas waarvan de dichtheid d (in gram per kubieke meter) wordt gegeven door

$$d = 0{,}05\, r^2\, e^{-2z}.$$

Bepaal de totale massa van het gas in het vat.

7 (8) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x & & + & 2z & = & 2 \\ & ky & & & = & 3 \\ x & & + & kz & = & 2 \end{cases}$$

waarbij k een reëel getal is.

(a) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft? Zo ja, geef al deze waarden.

(b) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft? Zo ja, geef al deze waarden.

(c) Zijn er waarden van k waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, geef al deze waarden.

Ga verder op het volgende blad.

8 (10) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 12 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \end{cases}$$

(a) Laat zien dat dit stelsel twee vrije variabelen heeft.

(b) Geef alle oplossingen van dit stelsel in een parametervoorstelling.

9 (10) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal of A inverteerbaar is. Zo ja, bepaal dan de inverse van A.

(b) Bepaal of de vergelijking $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oplosbaar is. Zo ja, bepaal dan een oplossing $\mathbf{x}$.

(c) Bereken A^2 en AB, waarbij B de matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ is.

(d) Bepaal de eigenwaarden van A, en voor elke eigenwaarde een eigenvector.

10 (8) Bekijk het dynamische systeem gedefinieerd door

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

waarbij de overgangsmatrix M en de begintoestand $\mathbf{x}_0$ gegeven zijn als

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x_2}$.

(b) Laat zien dat $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ (waarbij $i^2 = -1$) eigenvectoren van M zijn, en bepaal de bijbehorende eigenwaarden.