Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

Donderdag 10 december 2015, 13:30–15:30

Docent: dr. P. J. Bruin

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk uw naam en (Leids) studentnummer.
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: 1 + (aantal punten)/10.

Deze toets bestaat uit *zes* opgaven.

Succes!

---

1 (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = xy \ln(y^2 - 8).$$

(a) Bepaal het grootst mogelijke domein van f.

(b) Bereken de partiële afgeleiden van f.

(c) Bepaal in welk(e) punt(en) het raakvlak aan de grafiek van f horizontaal is.

2 (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \cos(x^2)\sqrt{y + 5}.$$

(a) Bereken de gradiënt van f in het punt $(0, 4)$.

(b) Gebruik een lineaire benadering om de functiewaarde $f(0{,}15;\ 4{,}06)$ te benaderen.

(c) Bepaal voor welke eenheidsvector(en) $\vec{u}$ de richtingsafgeleide van f in het punt $(0, 4)$ in de richting van $\vec{u}$ gelijk is aan 0.

3 (15). Bepaal het globale maximum en het globale minimum van de functie

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2 - y^2 + 4y$$

op het domein R dat ingesloten wordt door de lijn $y = 4$ en de parabool $y = x^2$.

Ga verder op de achterkant.

4 (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = (y^3 - 3y)\exp(-x^2).$$

Bepaal alle kritieke punten van f en classificeer ze als lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

5 (15). Het tweedimensionale gebied R wordt ingesloten door de lijnen

$$x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2\pi x.$$

(a) Schets het gebied R.

(b) Bereken de oppervlakte-integraal van de functie $f(x,y) = y$ over R.

(c) Bereken de dubbele integraal $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\frac{y}{2\pi}}^{1} \sin(\pi x^2)\,dx\,dy.$

(*Aanwijzing:* verwissel de integratievolgorde.)

6 (15). Het driedimensionale gebied T wordt beschreven door de ongelijkheden

$$0 \le x \le 1,$$
$$0 \le y \le 1,$$
$$0 \le z \le 3 - x^2 - y^2.$$

(a) Schets het gebied T.

(b) Bereken de inhoud van T.

(c) Bereken de volume-integraal van de functie $f(x,y,z) = x$ over T.

Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

10 december 2015, 13:30 – 15:30

Docent: Peter Bruin

Uitwerkingen

De puntenaantallen in de marge zijn een indicatie voor wat elke stap in de voorbeelduitwerking waard is.

1. $f(x,y) = xy \ln(y^2 - 8)$

a) Domein: in $\ln(t)$ moet $t > 0$ zijn, dus het domein van f wordt $y^2 - 8 > 0$, 2

oftewel: $y > \sqrt{8}$ of $y < -\sqrt{8}$ 2

(en x mag alles zijn)

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \ln(y^2 - 8)$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy) \ln(y^2-8) + xy \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \ln(y^2-8)}_{\frac{2y}{y^2-8}}$ 1

$= x \ln(y^2 - 8) + xy \cdot \frac{2y}{y^2-8}$ 2

c) Het raakvlak is horizontaal precies wanneer beide partiële afgeleiden 0 zijn. 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \ln(y^2 - 8) = 0$

$\iff y^2 - 8 = 1$

$\iff y = 3$ of $y = -3$ 2

(let op: $y = 0$ ligt niet in het domein!)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,3) = x\ln(3^2-1) + x\cdot\frac{18}{3^2-1}$$
$$= 18x$$

en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-3) = 18x$ [net zo] 2

Dit 0 stellen geeft $x = 0$, dus de punten waar het raakvlak horizontaal is, zijn $(0,3)$ en $(0,-3)$. 2

2. $f(x,y) = \cos(x^2)\sqrt{y+5}$

a) gradiënt: $\vec{\nabla} f(0,4) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,4), \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\sin(x^2)\sqrt{y+5}$ (kettingregel) 1

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+5}}$ 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,4) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,4) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

dus $\vec{\nabla} f(0,4) = (0, \frac{1}{6})$. 2

b) Lineaire benadering:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$$ 1

[kan op veel verschillende manieren geformuleerd worden, bijv. via differentialen:

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy$$]

In $(x,y) = (0,4)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,4) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,4) = \frac{1}{6}$

(zie (a)), en $f(0,4) = \cos(0)\sqrt{9} = 3$. 1

Verder: $\Delta x = 0{,}15 - 0 = 0{,}15$

$\Delta y = 4{,}06 - 4 = 0{,}06$ 1

Dus:

$$f(0{,}15;\, 4{,}06) \approx f(0,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,4)\cdot 0{,}15 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)\cdot 0{,}06$$

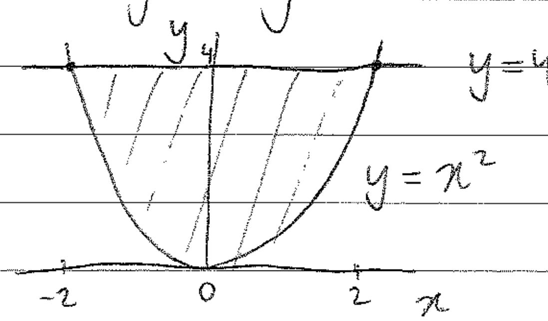
$$= 3 + 0\cdot 0{,}15 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}06$$

$$= 3{,}01.$$ 2

c) (verderop)

3. $f(x,y) = x^4 + 2x^2 - y^2 + 4y$

domein R:



snijpunten: $y = x^2$ en $y = 4$

$\iff x^2 = 4 \iff x = 2$ of $x = -2$ 2

rand van R: 2 stukken

- $-2 \leq x \leq 2$, $y = 4$
- $-2 \leq x \leq 2$, $y = x^2$ 1

* Inwendige kritieke punten bepalen

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4$ 1

(bestaan overal)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2+1)$, alleen 0 als $x=0$

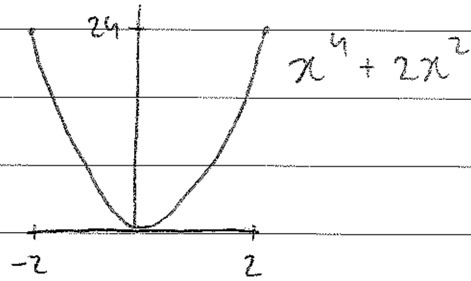
$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff y = 2$ 1

dus. $(0,2)$ is het enige inwendige kritieke punt 2

* Extrema op de rand bepalen

• $y=4$: $f(x,4) = x^4 + 2x^2$ $(-2 \leq x \leq 2)$ 1

schets:

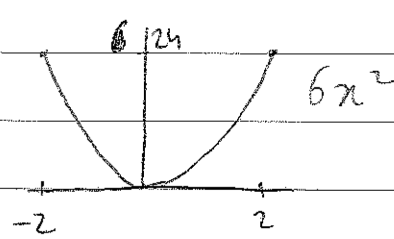


1

minimum in $x=0$, maxima in $x=\pm 2$ 1
[evt. afgeleide van x^4+2x^2 gebruiken]

• $y=x^2$: $f(x,x^2) = x^4+2x^2-x^4+4x^2$
$= 6x^2$ 1

schets:



1

minimum in $x=0$ (dus $y=0$), maxima
in $x=\pm 2$ (dus $y=4$) 1.

Dus 5 kritieke punten: $(0,0)$, $(0,2)$, $(0,4)$, $(-2,4)$, $(2,4)$.

* Functiewaarden vergelijken:

$$f(0,0) = 0$$
$$f(0,2) = 4 \qquad \text{globaal minimum} \qquad 1$$
$$f(0,4) = 0$$
$$f(-2,4) = 24 \qquad \text{globaal maximum} \qquad 1$$
$$f(2,4) = 24$$

4. $f(x,y) = (y^3 - 3y)\, e^{-x^2}$

Kritieke punten: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ òf een van de partiële afgeleiden bestaat niet.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^3 - 3y) \cdot -2x\, e^{-x^2} \qquad 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (3y^2 - 3)\, e^{-x^2} \qquad 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 3y^2 - 3 = 0$$
$$\iff y = 1 \text{ of } y = -1 \qquad 2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 4x\, e^{-x^2}$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1) = -4x\, e^{-x^2}$;
deze zijn 0 precies wanneer $x = 0$. 2

De kritieke punten zijn dus $(0,1)$ en $(0,-1)$. 1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2(y^3 - 3y)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(x\, e^{-x^2}\right)$$

$$= -2(y^3 - 3y)\left(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}\right) \qquad 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (3y^2-3)\cdot -2x\, e^{-x^2} \qquad 1$$

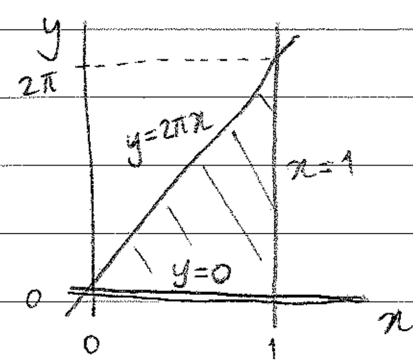
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\, e^{-x^2} \qquad 1$$

In elk punt (a,b) berekenen we

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b),$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b), \quad \Delta = AC - B^2$$

punt	A	B	C	Δ	type	4
(0, 1)	4	0	6	24	lok. min. ($\Delta > 0$, $A > 0$)	
(0, −1)	−4	0	−6	24	lok. max. ($\Delta > 0$, $A < 0$)	

5. a) Schets van R:



4

b) R is verticaal enkelvoudig:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 2\pi x \qquad 1$$

$$\text{dus } \iint_R y\, dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi x} y\, dy\, dx \qquad 1$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{2\pi x} dx \qquad 1$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(2\pi x)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 2\pi^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}\pi^2 x^3 \right]_{x=0}^{1}$$ 1

$$= \tfrac{2}{3}\pi^2$$ 1

c) R is ook horizontaal enkelvoudig:

$0 \le y \le 2\pi, \quad \frac{y}{2\pi} \le x \le 1$ 1

De gevraagde integraal is dus

$$\int_0^{2\pi} \int_{y/2\pi}^{1} \sin(\pi x^2) \, dx \, dy = \iint_R \sin(\pi x^2) \, dA$$ 1

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi x} \sin(\pi x^2) \, dy \, dx$$ 1

$$= \int_0^1 \left[\sin(\pi x^2) \, y \right]_{y=0}^{2\pi x} dx$$ 1

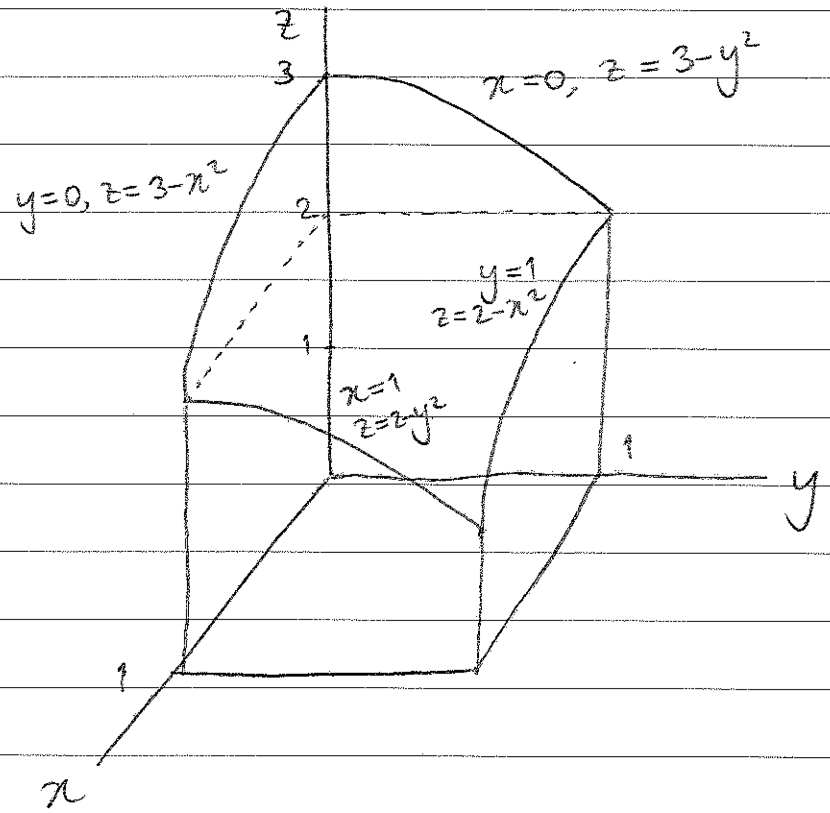
$$= \int_0^1 \sin(\pi x^2) \cdot 2\pi x \, dx$$

$$= \left[-\cos(\pi x^2) \right]_{x=0}^{1}$$ 1

$$= -\cos\pi + \cos 0$$

$$= 2.$$ 1

6. a) Schets van T:



5

b) Inhoud van T:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{3-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$$ [deze eerste stap is optioneel]

$$= \int_0^1 \int_0^1 (3-x^2-y^2) \, dy \, dx$$ 2

$$= \int_0^1 \left[3y - x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx$$ 1

$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^1 = \frac{7}{3}.$$ 1

c) De gevraagde integraal is

$$\iiint_T x\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{3-x^2-y^2} x\, dz\, dy\, dx \qquad 2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[xz \right]_{z=0}^{3-x^2-y^2} dy\, dx \qquad 1$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x(3-x^2-y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (3x - [redacted] x^3 - xy^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[3xy - [redacted] x^3 y - \tfrac{1}{3} x y^3 \right]_{y=0}^{1} dx \qquad 1$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{8}{3} x - x^3 \right) dx$$

$$= \left[\tfrac{4}{3} x^2 - \tfrac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{1} \qquad 1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{13}{12}. \qquad 1$$

[illegible]

2 c) $D_{\vec{u}} f(0,4) = \vec{\nabla} f(0,4) \cdot \vec{u}$ 1

$= \left(0, \frac{1}{6}\right) \cdot (u_1, u_2)$

$= 0\, u_1 + \frac{1}{6} u_2$

$= \frac{1}{6} u_2$ 1

$D_{\vec{u}} f(0,4)$ gelijk aan 0 stellen geeft 1

$$u_2 = 0$$ 1

en omdat $\vec{u}$ een eenheidsvector is, moet gelden

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$

oftewel

$$u_1^2 = 1.$$ 1

Dus de eenheidsvectoren $\vec{u}$ waarvoor $D_{\vec{u}} f(0,4) = 0$ zijn $(1, 0)$ en $(-1, 0)$. 1