

Hertentamen Calculus 2 voor MST

Donderdag 28 januari 2015, 13:30–16:30

Docent: dr. P. J. Bruin

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk uw naam en (Leids) studentnummer.
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: $1 + (\text{aantal punten})/10$.

Deze toets bestaat uit *tien* opgaven.

Succes!

- 1 (8) Gegeven is de functie $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 4x$.
- (a) Bereken de gradiënt van f .
 - (b) Laat zien dat f precies één kritiek punt heeft, en classificeer dit als lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.
- 2 (10) Gegeven is de functie $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 5} + (x - y)^2$.
- (a) Geef een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van g in het punt $(2, 3)$.
 - (b) Gebruik een lineaire benadering om de functiewaarde $g(2,03; 2,98)$ te benaderen.
- 3 (10) Bepaal de globale extrema van de functie

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$$

op het domein dat beschreven wordt door de ongelijkheden

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Ga verder op de achterkant.

- 4 (8) Het gebied D in het (x, y) -vlak wordt ingesloten door de krommen

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= 2x, \\y &= x^2 - 2x + 4.\end{aligned}$$

(a) Schets het gebied D .

(b) Bereken de oppervlakte-integraal $\iint_D x \, dA$.

- 5 (8) Bereken de oppervlakte-integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$ door middel van poolcoördinaten.

- 6 (10) Het driedimensionale gebied T wordt in bolcoördinaten (ρ, ϕ, θ) gedefinieerd door de ongelijkheden

$$\begin{aligned}1 &\leq \rho \leq 2, \\0 &\leq \phi \leq \pi/2, \\\pi/6 &\leq \theta \leq \pi/2.\end{aligned}$$

(a) Schets het gebied T .

(b) Bereken de volume-integraal $\iiint_T z \, dV$.

- 7 (8) Voor elke waarde van de parameter k bekijken we het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases}ky &= 3 \\4x - 16y &= 8 \\6x - 24y + (k-4)z &= 12\end{cases}$$

- (a) Bepaal alle waarden van k waarvoor het stelsel strijdig is.
(b) Bepaal alle waarden van k waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.
(c) Bepaal alle waarden van k waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

(Aanwijzing: vereenvoudig het stelsel door middel van elementaire bewerkingen.)

Ga verder op het volgende blad.

8 (10) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 6x_4 = 7 \\ 2x_3 + 8x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

- (a) Breng de bijbehorende aangevulde matrix in rijtrapvorm (echelonvorm) en laat zien dat het stelsel twee vrije variabelen heeft.
- (b) Breng de aangevulde matrix in gereduceerde rijtrapvorm en geef alle oplossingen van het stelsel in een parametervoorstelling.

9 (10) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Laat zien dat A^2 gelijk is aan $5A$.
- (b) Bepaal of A inverteerbaar is. Zo ja, bereken dan de inverse van A .
- (c) Bepaal de eigenwaarden van A , en voor elke eigenwaarde een eigenvector.
- (d) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P met de eigenschap dat $A = PDP^{-1}$.

10 (8) Bekijk het dynamische systeem gedefinieerd door

$$\mathbf{x}_{n+1} = B\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

met overgangsmatrix $B = \begin{pmatrix} 3,0 & -1,5 \\ 1,0 & 0,5 \end{pmatrix}$ en begintoestand $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Laat zien dat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eigenvectoren van B zijn, en bepaal de bijbehorende eigenwaarden.
- (b) Geef een gesloten formule voor \mathbf{x}_n .