Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

Donderdag 15 december 2016, 13:00–15:00

Docent: dr. P. J. Bruin

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk uw naam en (Leids) studentnummer.
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: 1 + (aantal punten)/10.

Deze toets bestaat uit *zes* opgaven.

Succes!

---

1 (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{x}{y}e^{y-x}.$$

(a) Bereken de partiële afgeleiden van f.

(b) Geef een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van f in het punt met (x,y)-coördinaten $(2,2)$.

(c) Bepaal in welk(e) punt(en) het raakvlak aan de grafiek van f horizontaal is.

2 (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \sin(x) + x\ln(y-1) - 2y.$$

(a) Bereken de gradiënt van f in het punt $(0,2)$.

(b) Gebruik een lineaire benadering om de functiewaarde $f(0{,}1;\ 1{,}96)$ te benaderen.

(c) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(0,2)$ in de richting van de eenheidsvector $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3 (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = 4x^3 - 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2.$$

Bepaal alle kritieke punten van f en classificeer ze als lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

Ga verder op de achterkant.

4 (15). Bepaal het globale maximum en het globale minimum van de functie

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 8x^2$$

op de halve cirkelschijf R die beschreven wordt door de ongelijkheden $y \geq 0$ en $x^2 + y^2 \leq 9$.

5 (15). Het tweedimensionale gebied R wordt ingesloten door de x-as, de parabool $y = x^2$ en de lijn $x = 2$.

(a) Schets het gebied R.

(b) Bepaal de oppervlakte van R.

(c) Bereken de dubbele integraal $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{y}\,\sqrt{16 - x^4}\, dx\, dy$.

(*Aanwijzing:* verwissel de integratievolgorde.)

6 (15). Een vat wordt beschreven door de volgende ongelijkheden (afmetingen in meter):

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

In het vat zit een gas waarvan de dichtheid d (in gram per kubieke meter) wordt gegeven door

$$d(x, y, z) = (3 - x^2 - y^2)e^{-z}.$$

Bepaal de totale massa van het gas in het vat.

Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST
15 december 2016, 13:00–15:00
Docent: Peter Bruin
Uitwerkingen

De puntenaantallen in de marge zijn een indicatie voor wat elke stap in de voorbeelduitwerking waard is.

1. $f(x,y) = \frac{x}{y} e^{y-x}$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} e^{y-x} - \frac{x}{y} e^{y-x}$ (product-/kettingregel) 2

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} e^{y-x} + \frac{x}{y} e^{y-x}$ (net zo) 2

b) Raakvlak: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ 1

$(a,b) = (2,2)$ invullen

$f(a,b) = \frac{2}{2} e^{2-2} = 1,$ 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ 2

dus $z = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(y-2)$ 1

$(= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$

c) Horizontaal raakvlak: komt neer op

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} e^{y-x}(1-x)$; dit is 0 precies wanneer $x = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2} x(-1+y)$; dit is 0 precies wanneer $x = 0$ of $y = 1$ 3

$x = 0$ valt af omdat $x = 1$ moet zijn 1

Conclusie: het enige punt waar het raakvlak horizontaal is, is $(x,y) = (1,1)$. 1

2. $f(x,y) = \sin(x) + x\ln(y-1) - 2y$

a) gradiënt: $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ 2

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x) + \ln(y-1)$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y-1} - 2$ 1

$(0,2)$ invullen: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 1 + 0 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 0 - 2 = -2$

dus $\vec{\nabla} f(0,2) = (1,-2)$. 1

b) lineaire benadering:

$f(x,y) \approx f(a,b) + \vec{\nabla} f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$

(kan op veel andere manieren geschreven worden) 3

neem $(a,b) = (0,2)$ en $(x,y) = (0{,}1;\ 1{,}96)$

$f(a,b) = 0 + 0 - 4 = -4$

$\vec{\nabla} f(a,b) = (1,-2)$ (zie (a))

$(x-a, y-b) = (0{,}1 - 0;\ 1{,}96 - 2) = (0{,}1;\ -0{,}04)$

dus de lineaire benadering is

$f(0{,}1;\ 1{,}96) \approx -4 + (1,-2)\cdot(0{,}1;\ -0{,}04)$

$= -4 + 1\cdot 0{,}1 + (-2)\cdot(-0{,}04)$

$= -3{,}82$ 3

c) richtingsafgeleide: $D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u}$

vul in: $(a,b) = (0,2)$

$\vec{\nabla} f(a,b) = (1,-2)$ (zie (a))

$\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 2

dus $D_{\vec{u}} f(0,2) = (1,-2)\cdot\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$= \frac{4}{5} - \frac{6}{5}$

$= -2/5$. 2

3. $f(x,y) = 4x^3 - 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2$

kritieke punten: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
(of een van de part. afg. bestaat niet)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^2 - 6x + 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x + 6y = 0$$ 2

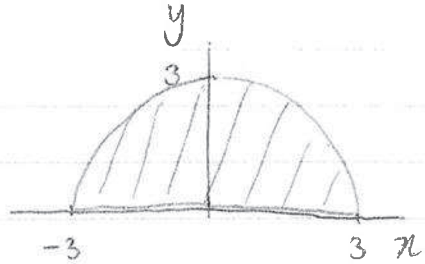
De tweede vergelijking geeft $y = -x$;
invullen in de eerste geeft $12x^2 - 12x = 0$
oftewel $12x(x-1) = 0$.
Oplossingen: $x = 0$ of $x = 1$
corresp. $y = -x$: $y = 0$ $y = -1$ 2
dus de kritieke punten zijn $(0,0)$ en $(1,-1)$ 2

Classificatie d.m.v. $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x - 6$,
$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$ en $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$ 3

kritiek punt	A	B	C	$\Delta = AC - B^2$	type	
$(0,0)$	-6	6	6	-72	zadelpunt	
$(1,-1)$	18	6	6	72	lok. minimum	6

4. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8x^2$

domein R:



inwendige kritieke punten: part. afg. 0 stellen 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2) - 16x$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2)$ 1

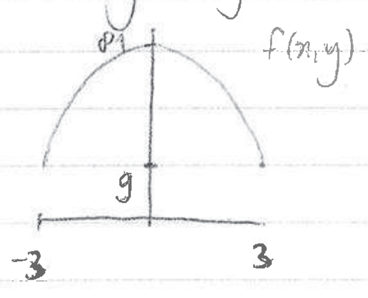
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ geeft $y = 0$ of $x^2+y^2 = 0$
(d.w.z. $x = y = 0$) 1

Deze voorwaarden geven alleen kritieke punten op de rand, dus niet in het inwendige 1
(het zijn $(0,0)$, $(-2,0)$ en $(2,0)$)

Rand: 2 stukken
Bovenkant: $x^2+y^2 = 9$, $-3 \le x \le 3$ en $y \ge 0$
Hier kunnen we f omschrijven tot

$f(x,y) = 9^2 - 8x^2$ omdat $x^2+y^2 = 9$ 2
$= 81 - 8x^2$

bergparabool



extrema bij $x = -3, 0, 3$

$\rightsquigarrow$ punten $(-3,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$ 2

Onderkant: $y = 0$, $-3 \le x \le 3$
Hier kunnen we f omschrijven tot

$f(x,0) = x^4 - 8x^2 \quad (-3 \le x \le 3)$ 2

Noem dit $g(x)$ en bepaal mogelijke extrema van g.

$$g'(x) = 4x^3 - 16x$$
$$= 4x(x^2 - 4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{kritieke punten} & x = 0, \quad x = -2, \quad x = 2 \\ + \text{ randpunten} & x = -3 \quad \text{en} \quad x = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{en} \\ y = 0 \end{array}$$ 2

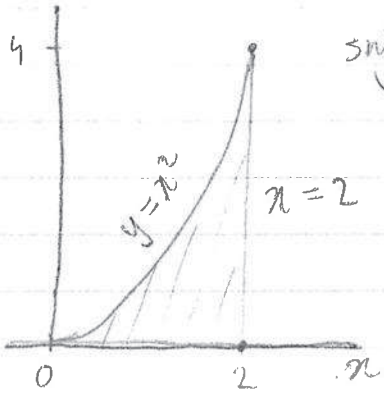
We moeten dus de volgende punten op de rand van R bekijken:

(x, y)	$f(x, y)$
$(-3, 0)$	9
$(0, 3)$	81
$(3, 0)$	9
$(-2, 0)$	-16
$(0, 0)$	0
$(2, 0)$	-16

← globaal maximum

} globaal minimum

2

5. a)  snijpunt: $x=2,\ y=x^2=4$ 1

3

$$\begin{pmatrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^2 \end{pmatrix}$$

b) oppervlakte: $A = \iint_R 1\, dA$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^2} 1\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 0)\, dx$$

(hiermee beginnen mag ook)

$$A = \int_0^2 x^2\, dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^2$$

$$= \frac{8}{3}$$ 3

c) Schrijf $f(x,y) = \sqrt{y}\,\sqrt{16-x^4}$

Merk op: $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R f(x,y)\, dA$

Dit herschrijven we tot

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{y}\,\sqrt{16-x^4}\, dy\, dx$$ 4

$$= \int_0^2 \left[\tfrac{2}{3} y^{3/2} \sqrt{16-x^4}\right]_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^2 \tfrac{2}{3} x^3 \sqrt{16-x^4}\, dx.$$

$$= \left[\tfrac{2}{3} \cdot -\tfrac{1}{6}(16-x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^2 \quad \left(\text{want } \tfrac{d}{dx}(16-x^4)^{\frac{3}{2}} = -6x^3(16-x^4)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{9}.$$ 4

6 vat: $-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 3$

dichtheid $\quad d(x,y,z) = (3 - x^2 - y^2)\, e^{-z} \quad (g/m^3)$

massa: $\quad m = \iiint_T d(x,y,z)\, dV$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} (3 - x^2 - y^2)\, e^{-z}\, dz\, dy\, dx \qquad 4$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[-(3 - x^2 - y^2)\, e^{-z}\right]_{z=0}^{3} dy\, dx \qquad 2$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (3 - x^2 - y^2)(1 - e^{-3})\, dy\, dx \qquad 1$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3y - x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=-1}^{1} dx \cdot (1 - e^{-3}) \qquad 2$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(6 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}\right) dx \cdot (1 - e^{-3}) \qquad 1$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{16}{3} - 2x^2\right) dx \cdot (1 - e^{-3})$$

$$= \left[\tfrac{16}{3} x - \tfrac{2}{3} x^3\right]_{x=-1}^{1} \cdot (1 - e^{-3}) \qquad 2$$

$$= \left(\left(\tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{3}\right) - \left(-\tfrac{16}{3} + \tfrac{2}{3}\right)\right)(1 - e^{-3})$$

$$= \frac{28}{3}(1 - e^{-3}) \qquad 3$$

$(\approx 8{,}87\ g)$