Lineaire Algebra en Differentiaalvergelijkingen
4052LADIFY (deeltoets 1)
Maandag 25 september 2017, 10.45-12.30 uur

Universiteit Leiden

- Gebruik van een calculator of tabellen is **niet** toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score +4)/4, op 1 decimaal afgerond, geeft het eindresultaat.
- **Normering:**

vr. 1	5,5	vr. 2	6	vr. 3	3,5	vr. 4a	2,5	vr. 5	4	vr. 6	3	vr. 7	2	vr. 8a	2
						vr. 4b	2,5							vr. 8b	2,5
						vr. 4c	2,5								

---

1. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx} = x(y^2+1) \\ y(0) = -2 \end{cases}.$$

(Geef de oplossing in expliciete vorm, dus als functievoorschrift)

2. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$, waarbij $x > 0$, door de transformatie $y = \dfrac{1}{v^3}$ te gebruiken. Geef deze oplossing in expliciete vorm. (Ter info: de gegeven differentiaalvergelijking is een zgn. Bernoulli vergelijking)

3. Bepaal de waarden van α en β waarvoor het stelsel lineaire vergelijkingen, gedefinieerd door de aangevulde matrix $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, oplosbaar is.

4. Bewijs of weerleg de volgende 3 beweringen:

a. **Bewering 1**: Als A en B twee $n \times n$ – matrices zijn met de eigenschap $AB = 0$, dan volgt $A = 0$ of $B = 0$.

b. **Bewering 2**: Als $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ en $W = Span\left\{ 2\underline{a} + \underline{b},\ \underline{a} - 2\underline{b} \right\}$ dan geldt $3\underline{a} \in W$.

c. **Bewering 3**: Er bestaat geen 3×3 – matrix C met de eigenschap $Nulruimte(C) = Kolomruimte(C)$.

z.o.z.

5. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen $AC\underline{x} = \underline{b}$, waarbij matrices A en C inverteerbaar zijn met $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Bepaal de oplossing(en) van dit stelsel **zonder A en C te reproduceren**.

6. Gegeven zijn de 4×4 – matrices A en B met $\det(A) = -3$ en $\det(B) = 2$.
Bereken $\det(-(A^2B^{-1})^T)$.

7. Bepaal matrix $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ als $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathbb{R}^n$ is.

8. Gegeven is marix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ met $k \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal k zodanig dat $Kolomruimte(A) = \mathbb{R}^3$.

b. Neem $k = -3$ en bepaal een basis van $Nulruimte(A)$.