Lineaire Algebra en Differentiaalvergelijkingen
4052LADIFY (deeltoets 3)
Dinsdag 31 oktober 2017, 9.00-11.00 uur

Universiteit Leiden

---

- Gebruik van een calculator of tabellen is **niet** toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Een tabel van Laplace-getransformeerden is bijgevoegd.
- Het getal (score $+2\frac{1}{2}$ )/$2\frac{1}{2}$, op 1 decimaal afgerond, geeft het eindresultaat.
- **Normering**:

| opg. 1: | opg. 2: | opg. 3: | opg. 4: | opg. 5: |
|---|---|---|---|---|
| 4 ptn. | $5\frac{1}{2}$ ptn. | 3 ptn. | 3 ptn. | 7 ptn. |

---

**1.** Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y'(t) = t - 4\int_0^t y(t-\tau)\,d\tau \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**2.** Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \text{, waarbij } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq t < 1 \\ t-1 & \text{als } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{als } t \geq 2 \end{cases}.$$

(Hint: $\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+2})$, dit hoeft u niet aan te tonen)

**3.** Zij $f(t)$ een functie, $F(s)$ de bijbehorende Laplace getransformeerde en $c$ een positieve constante. Bepaal de Laplace getransformeerde van $f(ct)$, d.w.z. druk $L[f(ct)](s)$ uit in $F$, $s$ en $c$. (In deze opgave zoek je dus uit wat het effect is van tijdschaling op de Laplace getransformeerde)

**4.** De functie $f$ wordt gedefinieerd door:
- $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$ voor $0 \leq x \leq \pi$.
- $f$ is even.
- $f(x) = f(x + 2\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bepaal de Fourierreeks van $f$.

Z.O.Z.

5. Gegeven is het golfprobleem: $\begin{cases} u_{xx} = 4u_{tt} \text{ voor } 0 < x < 4 \text{ en } t > 0 \\ u(0,t) = 0 \text{ en } u(4,t) = 0 \text{ voor } t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \text{ voor } 0 \leq x \leq 4 \\ u_t(x,0) = 3\sin(2\pi x) \text{ voor } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

a. Bepaal, m.b.v. de methode van scheiding van variabelen, alle oplossingen van de gegeven partiële differentiaalvergelijking die tevens voldoen aan de twee gegeven randvoorwaarden en de *homogene* beginvoorwaarde (de inhomogene beginvoorwaarde laten we even buiten beschouwing).

b. Bepaal de oplossing van het gegeven golfprobleem.

TABEL VAN LAPLACE-GETRANSFORMEERDEN

| | $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| 2 | $t$ | $\dfrac{1}{s^2}$ |
| 3 | $t^n$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 4 | $\sin at$ | $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ |
| 5 | $\cos at$ | $\dfrac{s}{s^2+a^2}$ |
| 6 | $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |
| 7 | $te^{at}$ | $\dfrac{1}{(s-a)^2}$ |
| 8 | $t^n e^{at}$ | $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| 9 | $e^{at}\sin bt$ | $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |
| 10 | $e^{at}\cos bt$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |
| 11 | $t\sin at$ | $\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 12 | $t\cos at$ | $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| 13 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 14 | $\delta(t-c)$ | $e^{-cs}$ |
| 15 | $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ |
| 16 | $u_c(t)$ | $\dfrac{e^{-cs}}{s}$ |
| 17 | $u_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| 18 | $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ |
| 19 | $t^n f(t)$ | $(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$ |
| 20 | $\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ | $F(s)G(s)$ |