Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

Vrijdag 15 december 2017, 9:00–11:00

Docent: dr. P. J. Bruin

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk uw naam en (Leids) studentnummer.
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 90 punten. Cijfer: 1 + (aantal punten)/10.

Deze toets bestaat uit *zes* opgaven.

Succes!

---

1 (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}\,\ln(y - 3).$$

(a) Bepaal het grootst mogelijke domein van f.

(b) Bereken de partiële afgeleiden van f.

(c) Geef een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van f in het punt met (x, y)-coördinaten $(2, 4)$.

2 (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\pi x^2 + \pi y} \cos(\pi y).$$

(a) Bereken de gradiënt van f.

(b) Laat zien dat er twee eenheidsvectoren $\vec{u}$ zijn waarvoor de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 1)$ in de richting $\vec{u}$ gelijk is aan 0, en bepaal deze eenheidsvectoren.

(c) Bepaal de eenheidsvector $\vec{u}$ waarvoor de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 1)$ in de richting $\vec{u}$ maximaal is, en bereken deze richtingsafgeleide.

Ga verder op de achterkant.

3 (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - 4x + \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 7y.$$

(a) Bereken de tweede partiële afgeleiden $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(b) Bepaal alle kritieke punten van f en classificeer ze als lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

4 (15). Het tweedimensionale gebied R wordt ingesloten door de krommen $x = -3$ en $x + y^2 = 1$. Er ligt een hoeveelheid sneeuw op R waarvan de hoogte (in centimeters) wordt beschreven door de functie

$$h(x,y) = x^2 - y^4 + 2x + 15.$$

(a) Schets het gebied R.

(b) Bepaal op welke punten van R de hoogte van de sneeuw maximaal respectievelijk minimaal is, en hoe hoog de sneeuw op deze punten ligt.

5 (15). Het tweedimensionale gebied R wordt beschreven door de ongelijkheden

$$y \geq 0, \quad y \geq x^3, \quad x - y \geq 0.$$

(a) Bereken de oppervlakte van R.

(b) Bereken de dubbele integraal $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^{1/3}} \sqrt{\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4}\, dx\, dy$.
(*Aanwijzing:* verwissel de integratievolgorde.)

6 (15). Het driedimensionale gebied T wordt beschreven door de ongelijkheden

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 3x + 2y \leq 6, \quad 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2.$$

(a) Schets het gebied T.

(b) Bereken de massa van T als het een voorwerp is met constante dichtheid $\rho(x,y,z) = 2{,}0 \cdot 10^3$ (x, y, z in meter; $\rho(x,y,z)$ in kilogram per kubieke meter).