Tentamen Calculus C voor MST, 4601CALCCY
dinsdag 9 juli 2013; 9.00-12.00 uur

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

Een rekenmachine en het formuleblad bij deze cursus mogen gebruikt worden.

Laat duidelijk zien hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

De normering staat in de kantlijn. Het tentamencijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 5 punten, gedeeld door 5 en daarna afgerond.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn drie vlakken gegeven:

$$\begin{array}{llllll} \text{Vlak } V_1: & x & +y & +3z & =1 \\ \text{Vlak } V_2: & 2x & +5y & & =8 \\ \text{Vlak } V_3: & 3x & +4y & +7z & =7. \end{array}$$

4p a) Toon aan dat er geen punten (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$ zijn die in alledrie de vlakken liggen. Gebruik hierbij een aangevulde matrix en veeg die tot echelonvorm.

3p b) $\mathcal{L}_{12}$ is de verzameling snijpunten van (alleen) vlakken V_1 en V_2. Geef een vectorvoorstelling voor $\mathcal{L}_{12}$.

1p c) Laat door invullen zien dat de oplossing uit vraag 1b inderdaad voldoet aan de vergelijkingen van vlakken V_1 en V_2.

2p d) $\mathcal{L}_{13}$ is de verzameling snijpunten van vlakken V_1 en V_3. Beschrijf en/of schets hoe $\mathcal{L}_{12}$ en $\mathcal{L}_{13}$ ten opzichte van elkaar liggen in $\mathbb{R}^3$.

2. Gegeven zijn matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en vector $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2p a) Bereken A^{-1}.

2p b) Bereken $\mathbf{x}_{-1} = A^{-1}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, en $\mathbf{x}_2 = A^2\mathbf{x}_0$.

2p c) Schets in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\mathbf{x}_{-1}$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, en $\mathbf{x}_2$. Beschrijf in woorden wat de afbeelding $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ doet.

1p d) Bereken de eigenwaarden van A (niet de eigenvectoren).

Z.o.z. voor opgaven 3, 4 en 5.

3. Functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $\quad f(x,y) = x(1-x^2-y^2)$.

2p a) Laat zien dat de gradiënt van f in (1,1) gelijk is aan $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2p b) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt (1,1) in de richting $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2p c) In welke richtingen is de richtingsafgeleide van f in het punt (1,1) gelijk aan 0?

2p d) Geef een vergelijking voor het raakvlak aan f in het punt (1,1).

2p e) Laat zien dat er precies vier kritieke punten (x,y) zijn, d.w.z. punten waar beide partiële afgeleiden gelijk zijn aan 0.

1p f) Toon aan dat f in het punt $(0,1)$ *geen* maximum of minimum heeft.

3p g) Bepaal de maximale en de minimale waarde van f op de cirkelschijf $x^2+y^2 \leq 1$.

2p h) Bepaal de maximale en de minimale waarde van f op de cirkelschijf $x^2+y^2 \leq 2$.

4. Gebied D ligt in het eerste kwadrant van het xy-vlak tussen drie krommen:
voor alle (x,y) in D geldt dat $\quad y \leq 4, \quad y \leq 4x \quad$ en $\quad y \geq x^2$.
Integraal $I = \int\int_D \; x \; dA$.

1p a) Schets het gebied D (inclusief benoemde assen en coördinaten snijpunten).

2p b) Stel de integraal I op wanneer u eerst over y integreert, en daarna over x.

2p c) Stel de integraal I op wanneer u eerst over x integreert, en daarna over y.

1p d) Bereken I (op één manier).

5. Bereken het zwaartepunt van een halve bol met een constante dichtheid k.
De halve bol B bestaat uit alle punten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ met $\; z \geq 0 \;$ en $\; x^2+y^2+z^2 \leq 1$.
M is de massa van de halve bol.
Het zwaartepunt heeft coördinaten $(0,0,z_0)$ waarin $z_0 = \frac{1}{M} \int\int\int_B \; z \; k \; dV$.

1p a) Bepaal M.

5p b) Bereken z_0.