Toets 2 Calculus 1 voor MST, 4051CALC1Y

19 september 2019, 10:45 — 12:45 uur Technische Universiteit Delft, Delft Institute of Applied Mathematics

---

Naam: **(Leids) studentnummer:**

Groep (omcirkel): A (Verheij) / B (Knaap) / C (Kooij) / D (Smet/Keijzer)

Een niet-grafische rekenmachine mag gebruikt worden. Een formuleblad vindt u achterin.
Alle antwoorden moeten exact zijn, tenzij anders aangegeven.
Het cijfer is de som van het aantal behaalde punten plus 3, gedeeld door 3.

---

1. Kort-antwoordvraag: alleen de antwoorden worden nagekeken.

		Antwoord
a) 2p	Schrijf de volgende uitdrukking in de vorm $a + bi$: $$(-\sqrt{3} + i)^6 =$$	
b) 2p	Voor de functie $y(t)$ geldt dat $$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 34y = 0$$ Bepaal alle complexe getallen r waarvoor $y(t) = e^{rt}$ een oplossing is.	
c) 2p	Schets in het complexe vlak alle oplossingen van de vergelijking $$z^6 = -64$$	
d) 2p	$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-5x}}{9x} =$$	
e) 2p	In het xy-vlak ligt het punt $(0, 0)$ op een kromme die impliciet gegeven wordt door $$\sin(x + y) = 5y\sin(x).$$ Geef een vergelijking voor de raaklijn aan de kromme in $(0, 0)$.	

Opgaven 2 en verder zijn open vragen. Daarbij moet u juist duidelijk laten zien hoe u aan de antwoorden gekomen bent.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10}$

2p (a) Bereken alle horizontale en verticale asymptoten van f.

2p (b) Bereken alle nulpunten en discontinuïteiten van f en schets de grafiek van f.

2p (c) Voor welke waarde(n) van α is $f(x) = \alpha$ niet oplosbaar?

3. Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten. Geef aan hoe u dat doet.
Als de limiet niet bestaat, schrijf dan op waarom dat zo is.

2p (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} =$

2p (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} =$

2p (c) $\lim_{x \to -\infty} x \ln(1 - \frac{2}{x}) =$

1p (d) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x =$

2p **4.** (a) Laat zien dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(5h)-1}{h} = 0$$

zònder de regel van de l'Hospital te gebruiken.

Aanwijzing: vermenigvuldig teller en noemer met $(\cos(5h)+1)$.

2p (b) $f(x) = \cos(5x)$.

Laat met de definitie van de afgeleide zien dat $f'(x) = -5\sin(5x)$, ook weer zònder de regel van de l'Hospital te gebruiken.

Aanwijzingen: Gebruik het formuleblad (laatste bladzijde) en opgave 4a.

Extra ruimte voor uitwerkingen. Geef duidelijke verwijzingen over en weer.

FORMULEBLAD Calculus MST

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x \sin y\\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x \sin y\\
\sin 2x &= 2\sin x\cos x\\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y\\
\cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x \sin y\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\\
\cosh x &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})
\end{aligned}
$$

Standaard Taylorontwikkelingen:

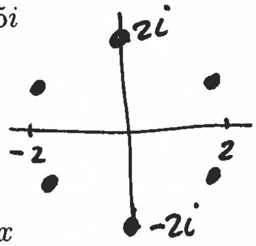
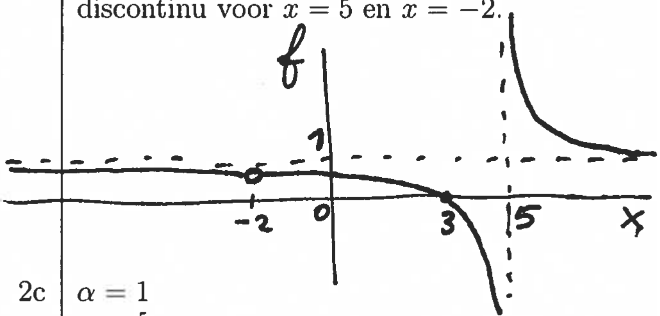
$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + O(x^4)\\
\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + O(x^7)\\
\cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + O(x^6)\\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + O(x^4), \quad x \in (-1,1]\\
(1+x)^a &= 1 + ax + \tfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \tfrac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + O(x^4), \quad a \in \mathbb{R},\ x \in (-1,1)\\
\arctan x &= x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + O(x^7),\ x \in [-1,1]
\end{aligned}
$$

Integraaltabel:

$$
\begin{aligned}
\int x^a\, dx &= \tfrac{1}{a+1}x^{a+1}\ + C \quad (a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})\\
\int \tfrac{1}{x}\, dx &= \ln|x|\ + C\\
\int a^x\, dx &= \int e^{x\ln a}\, dx = \tfrac{1}{\ln a}a^x\ + C \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})\\
\int \sin x\, dx &= -\cos x\ + C\\
\int \cos x\, dx &= \sin x\ + C\\
\int \tfrac{1}{\cos^2 x}\, dx &= \tan x\ + C\\
\int \tfrac{1}{1+x^2}\, dx &= \arctan x\ + C\\
\int \tfrac{1}{1-x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{|1+x|}{|1-x|}\ + C\\
\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \arcsin x\ + C\\
\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})\ + C\\
\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}|\ + C\\
\int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ + C\\
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x\ + C\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \ = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2}, \text{ voor } n = 2,4,6,\cdots. \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}, \text{ voor } n = 3,5,7,\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Antwoorden Toets 2 Calculus 1 voor MST, 4051CALC1Y

donderdag 19 september 2019

	antwoord	noodzakelijke motivering
1a 1b 1c 1d	-64 $-3 \pm 5i$  $y = -x$	
2a 2b 2c	horizontale asymptoot $y = 1$ voor $x \to \pm\infty$. verticale asymptoot $x = 5$. nulpunt $x = 3$ discontinu voor $x = 5$ en $x = -2$.  $\alpha = 1$ $\alpha = \frac{5}{7}$.	limieten voor $x \to \pm\infty$ limieten voor $x \to 5^+$, en $x \to 5^-$ $f(3) = 0$ alle asymptoten op juiste manier benaderd door f, perforatie bij $x = -2$. nulpunt in $x = 3$. grafiek met asymptoot grafiek en limiet voor $x \to -2$.
3a 3b 3c 3d	$\frac{3}{2}$ 0 -2 $\frac{1}{e^2}$	berekening met $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ of met de 'l Hospital. berekening met de 'l Hospital. berekening met de 'l Hospital. berekening $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln(1-\frac{2}{x})}$ en het antwoord van 3c.
4a 4b		$(\cos 5h - 1)(\cos 5h + 1) = \cos^2 5h - 1$ $= -\sin^2 5h$ en $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5h)}{5h} = 1$ definitie van de afgeleide, 4a en $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5h)}{5h} = 1$.